



Опциональность при управлении ALM рисками

Банк «Санкт-Петербург»

17.09.2025

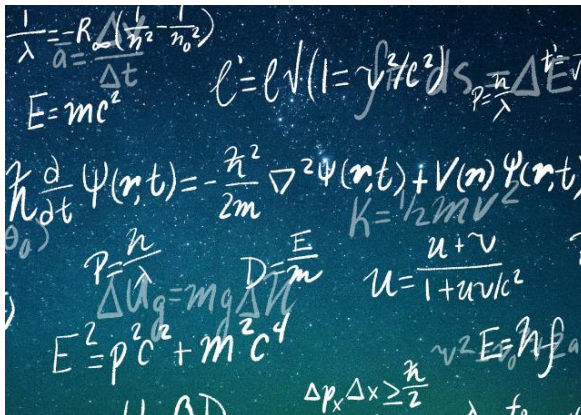


Классические опционы на досрочные погашения кредитов и депозитов

Рецепт расчета опциона на досрочное погашение кредита / депозита:

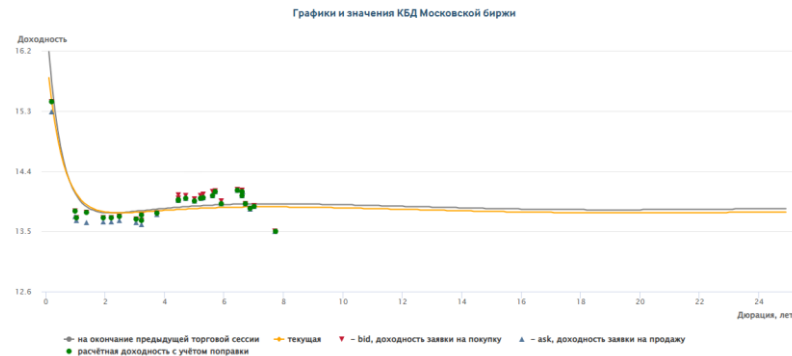
Формула для оценки стоимости

Предпосылки – рациональность клиентов, безарбитражный подход к ценообразованию



Модель временной структуры процентных ставок

Как будет осуществляться моделирование кривых процентных ставок



Учет рисков опциональности в контексте ценообразования

Какие риски несут опционы на балансе

$$\begin{aligned}
 \text{P\&L of the option portfolio} \quad \delta\Pi &= \underbrace{\Theta \cdot \delta t}_{\text{Theta P\&L}} + \underbrace{\Delta \cdot \delta S}_{\text{Delta P\&L}} + \underbrace{\nu \cdot \delta \sigma}_{\text{Vega P\&L}} + \underbrace{\rho \cdot \delta r}_{\text{Rho P\&L}} \\
 + \underbrace{\frac{1}{2} \Gamma \cdot \delta S^2}_{\text{Gamma P\&L}} + \underbrace{\text{Vanna} \cdot \delta S \cdot \delta \sigma}_{\text{Vanna P\&L}} + \underbrace{\frac{1}{2} \text{Volga} \cdot \delta \sigma^2}_{\text{Volga P\&L}} + \underbrace{\text{Charm} \cdot \delta S \cdot \delta t}_{\text{Charm P\&L}}
 \end{aligned}$$

Досрочные погашения депозитов

Рассмотрим следующую задачу: определить скидку к ставке по депозиту, допускающему возможность его досрочного изъятия с пересчетом ранее начисленных процентов по ставке до востребования.

- Срок депозита T лет, $T > 0$, начальная величина депозита равна 1
- Клиент-владелец депозита имеет право досрочно забрать свой депозит в любой момент времени $\tau \in (0, T)$. В этом случае ставка для начислений процентов за фактический срок депозита равна κ_0
- Выплата процентов по депозиту осуществляется в момент времени T
- Ценообразование опциона проведем с позиции справедливой стоимости денежных средств, т.е. без учета маржинального заработка на нем

Пусть ставка по депозитам равна как $R(t, T) = L(t, T) - opt_{T-t}$, $L(t, T)$ – простая спот ставка на срок $T - t$, определяемая как $L(t, T) = \left(\frac{1}{P(t, T)} - 1\right) \cdot \frac{1}{T-t}$, где $P(t, T)$ – цена бескупонной облигации на момент t с погашением в момент T . Тогда цена опциона opt_T находится из соотношения:

$$1 = \text{ess sup}_{\tau} E^Q[\max\{(1 + R(0, T)T), (1 + \kappa_0\tau)(1 + R(\tau, T)(T - \tau))\} \cdot DF_T]$$

После преобразований ряда преобразований получаем уравнение для вывода цены опциона

$$opt_T = \text{ess sup}_{\tau} E^Q[\max\{L(\tau, T)(T - \tau) + (\kappa_0 + opt_T)\tau - L(0, T)T, 0\} \cdot DF_T] \cdot \frac{1}{T \cdot P(0, T)}$$

Выводы:

- Даже для простого продукта расчет получается нетривиальным. Формулы не сводятся к ценам ванильных европейских put / call опционов, т.к. клиент может проводить досрочное погашение в оптимальный для него момент времени (т.н. «момент остановки»)
- С учетом обозначенных сложностей возможно решить данную задачу методом Монте-Карло + его расширением для опционов американского типа – Least Squares Monte Carlo

Моделирование ставок

Ценообразование опционов требует выбора модели временной структуры процентных ставок, которая позволит моделировать $L(t, T)$ – ставки по оставшемуся сроку, а также значения дисконт факторов DF_T .

Основное требование к модели – учет ожиданий по ставкам, т.е. модель должна иметь возможность калибровки к некоторой кривой ставок.

В этой части могут быть использованы модели, получаемые в рамках подхода HJM (модель Heath-Jarrow-Morton), например

- Hull-White: $dr(t) = \alpha(\theta(t) - r(t))dt + \sigma dW(t)$
- Ho-Lee: $dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t)$

В этом случае $\theta(t)$ подбирается так, чтобы кривая бескупонных доходностей и стоящая за ней форвардная кривая в рамках модели совпадали бы целевыми значениями.

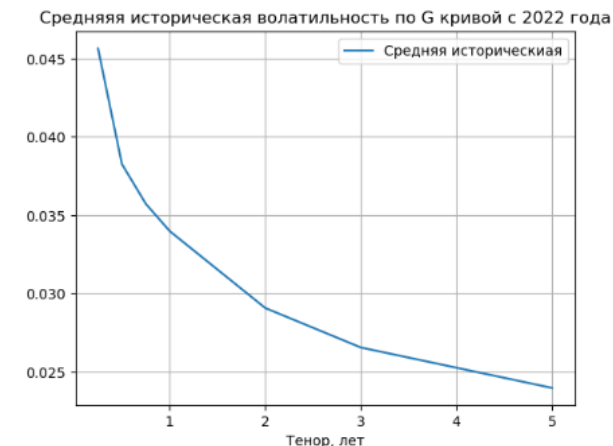
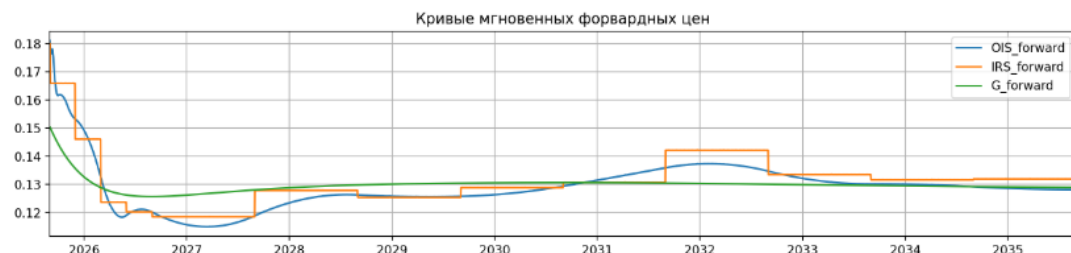
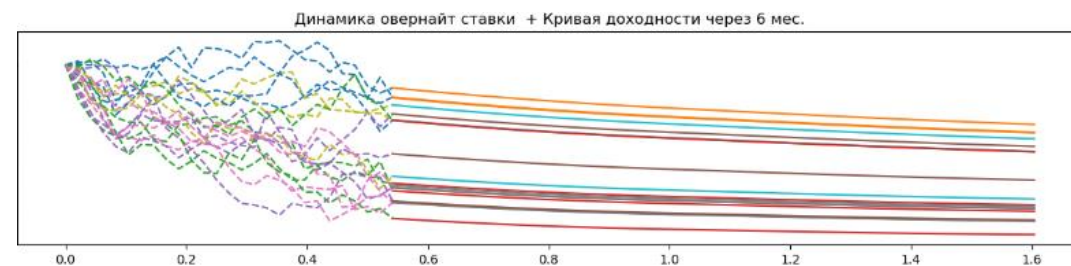
Оценки волатильности (параметры α , σ) возможно получить как:

1. Исторические оценки волатильности по движению кривых IRS / OIS / G кривой.
2. Оценки волатильности, которые выводятся из истории фактических потерь по досрочным погашениям в системе трансфертных операций (СТО).
3. Вмененные волатильности из актуальных котировок Cap / Floor опционов на КС ЦБ.

Мы считаем, что **наиболее консистентным вариантом для ценообразования будет использование калибровки модели ставок под кривую ТЦ**, т.к. в этом случае:

- цены опционов получаются согласованными с ожиданиями, заложенными в ставки Банка
- оценки потерь, регистрируемые в системе трансфертных операций, будут в большей степени соответствовать расчётным ценам опционов.

В части волатильности – считаем **правильным использовать вмененные волатильности**, т.к. они представляют собой ожидания рынка по будущей неопределенности, но требуется **сверять их с историческими значениями и сопоставлять получаемые цены опционов с потерями от досрочных погашений в СТО**.



Учет рисков опциональности

- Встроенный в продукт опцион, даже при условии его корректного ценообразования все еще несет риски: эффект от его реализации минус полученная комиссия – это случайная величина
- Если мы обратимся к «классическим» опционам, то даже при дельта хеджировании проданного опциона PnL по опциону вместе с хеджирующей позицией будет случайной величиной, изменения которой будут устроены как:

$$\Delta PnL_t = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}^2 - \sigma_t^2)\Gamma_t S_t^2 \Delta t,$$

где $\hat{\sigma}$ - волатильность, по которой велось ценообразование, σ_t - фактическая волатильность в момент t ,
 Γ_t - коэффициент «гамма» для опциона, S_t - цена базового актива



- В случае встроенных в банковские продуктов опционов зачастую хеджирование не возможно, поэтому предлагаем следующую стратегию:
 - При ценообразовании опционов учитывать стоимость не только как ожидаемую величину потерь
 - Но также проводить оценку возможных потерь на 1 рубль продукта как $VaR_{99\%}$ либо $ES_{99\%}$
 - Закладывать в стоимость опциона дополнительную плату за рентабельность резервов на возможные опционные потери как $ES_{99\%} \cdot ROR$, где ROR – рентабельность резервов на покрытие опционных рисков в процентах годовых

ML модели для построения модельных графиков погашений

- Ипотека и потребительские кредиты – примеры продуктов ФЛ, где у клиентов есть возможность осуществлять **досрочные погашения**. Существует два вида досрочных погашений: **частичные (ЧДП)** и **полные (ПДП)**.
- Предпосылки ЧДП**, когда заемщик вносит сумму, превышающую ежемесячный платеж: **наличие у клиента свободных средств** (выплаты по мат. капиталу, сформированные ранее накопления и т.п.), которые он планирует направить на погашение кредита.
- При ПДП заемщик выплачивает оставшуюся сумму кредита единовременно. **ПДП большей частью зависят от стимула к рефинансированию** (разница между ставкой клиента и ставкой, по которой можно рефинансировать кредит) и оставшегося срока кредита.
- Из-за досрочных погашений договорные графики платежей не отражают реальную срочность продукта. **Это становится вызовом для создания моделей для построения ожидаемых потоков платежей.**

Примеры моделей – модели, которые предсказывают коэффициенты досрочных погашений: SMM (Single monthly mortality), CPR (Conditional Prepayment Rate) в зависимости от срока кредита, сезонного фактора, **стимула к рефинансированию**, характеристик кредита (Loan-to-Value), заемщика (Payment-to-Income и т.п.). Либо модели, которые явно предсказывают остаток кредита в зависимости от тех же параметров.

С точки зрения реализации моделями могут быть:

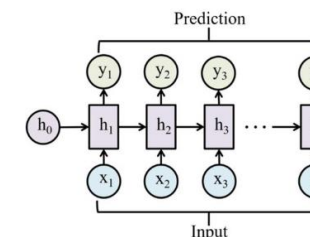
- Математическая модель**, параметры которой подбираются так, чтобы описывать их процесс

$$SMM_t = F(t, \Delta r_t, LTV, PTI, Maturity, \dots)$$

- Градиентный бустинг** (Catboost, XGBoost)



- Нейронные сети**



Трансфертное ценообразование с использованием модельных графиком платежей

Одна из задач казначейства банка - предоставление фондирования под кредит по внутренней цене, называемой **трансфертной**.

Как учесть модельные графики платежей при определении стоимости фондирования?

Один из способов – следующий: **трансфертная цена** r^* это ставка, при которой NPV кредита с позиции казначейства равна 0.

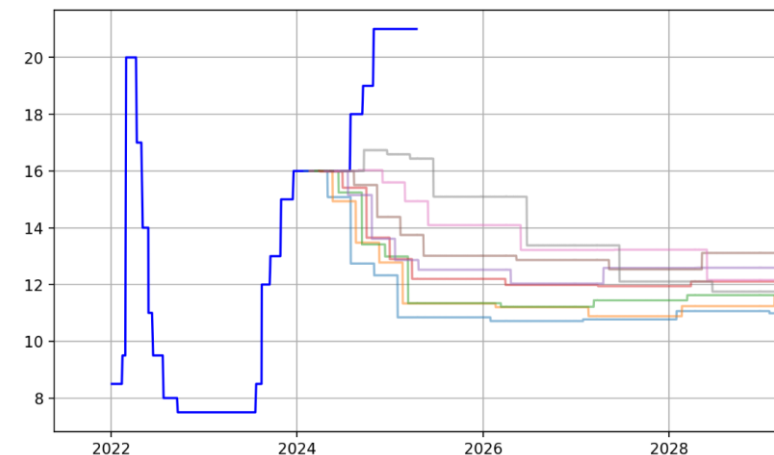
$$R_0 = \sum_{t=1}^{12T} \underbrace{\left((R_{t-1} - R_t) + R_{t-1} \cdot \frac{r^*}{12} \right)}_{CF_t(r^*)} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{ftp_t}{12} \right)^{-t}}_{DF_t}$$

Где:

- R_t ($t = 0, 1, \dots$) – остаток кредита по прогнозной модели. При построении прогноза остатков учтен ожидаемый сценарий по ставкам.
- ftp_t - трансфертная цена ($t = 0, 1, \dots$) для ресурса сроком t месяцев.

- Остаток кредита R_t ($t = 0, 1, \dots$) по модели зависит от прогноза ставок, т.к. в модели используется фактор стимула к рефинансированию.
- Но проблема с прогнозами в том, что они не всегда сбываются.

Пример прогноза ставок от **1H2024**, получаемый из IRS KR (процентный своп на ключевую ставку ЦБ РФ):



Встроенная опциональность

При использовании модельных графиков платежей трансфертная цена r^* по кредиту определяется на основе прогноза ставок, действовавшего на момент выдачи кредита. Т.е. r^* определяется как решение уравнения

$$R_0 = \sum_{t>0} CF_t^{\mathbb{E}(Scenario)}(r^*) \cdot DF_t^{\mathbb{E}(Scenario)}, \quad (1)$$

Где

- R_0 - первоначальная сумма кредита,
- $CF_t^{\mathbb{E}(Scenario)}$ - модельный платеж в ожидаемом сценарии по ставкам,
- $DF_t^{\mathbb{E}(Scenario)}$ - дисконт-фактор в ожидаемом сценарии (рассчитан на основе трансфертных цен, установленных на момент ценообразования).

В действительности, правильным было бы определять трансфертную цену для всего распределения сценариев:

$$\checkmark \quad R_0 = \mathbb{E} \left[\sum_{t>0} CF_t^{Scenario}(r^*) \cdot DF_t^{Scenario} \right], \quad (2)$$

Т.е. трансфертная цена r^* это ставка при которой ожидаемый PV модельных графиков платежей совпадает с первоначальной суммой кредита в среднем по всем сценариям движения ставок.

Стоимость опционного спреда определяется как разница между стоимостью фондирования, посчитанной для вариантов (2) и (1).

Этот спред стоит учитывать как во внутреннем, так и во внешнем ценообразовании, добавляя его и к ставке клиента и к внутренней ставке фондирования.

Распределение опциональных рисков



- Для того, чтобы учесть то, как работает модель и прогноз ставок, казначейство регулярно подсчитывает переоценку внутренней стоимости кредита.
- Если в начале периода предоставления фондирования NPV_0 кредита равно 0, то в дальнейшем NPV_t может быть как положительной так и отрицательной величиной.
- Величины $\Delta NPV_t = NPV_t - NPV_{t-1}$ – это эффекты встроенной опциональности. Суммарные эффекты по кредиту за период его жизни в среднем между сценариями по ставкам, равны 0, но между сценариями и в конкретные периоды времени могут быть как положительными, так и отрицательными.



- Величины эффектов от риска опциональности ΔNPV_t распределяются в некоторой пропорции между финансовыми результатами казначейства и коммерческих подразделений (КП), выдавших кредиты, большая часть эффектов при этом остается за казначейством. В этой же пропорции распределяется опционный спрэд, включенный в ставку клиента.



КП не должны быть абсолютно нечувствительным к риску опциональности. Наличие риска подталкивает к разработчиков продуктов к их более аккуратному структурированию. В т.ч. в ситуациях кризиса появляется возможность ощутить риски, которые продукт и его опциональность могут нести.



Спасибо
за внимание
